BOUKHOBZA OMAR

Université A. Assaâdi
Faculté des Sciences
Département de Maths.

SMA – SMI
Algèbre S_1
2008 – 2009

Série n° 1

Exercice 1: Montrer les théorèmes de logique suivants:

1) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$

2) $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ P \Leftrightarrow R \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases}$

3) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$

4) $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$

Exercice 2: Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$, $A_0, A_1, \ldots A_n$ des parties de E telles que :

$$\phi = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \ldots \subsetneq A_n = E$$

On pose $B_1 = A_1 - A_0, \ldots B_n = A_n - A_{n-1}$

-) Montrer que $\{B_2, .., B_n\}$ est une partition de E.

Exercice 3: Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1°/ Démontrer que si $g \circ f$ est injective, f est injective.

2°/ Démontrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Exercice 4: Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties de E non vide et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par : $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1°/ Montrer que f est injective si et ssi $A \cup B = E$

2°/ Montrer que f est surjective si et ssi $A \cap B = \phi$

3°/ Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.

Exercice 4': (Facultatif) Démontrer ce théorème de Cantor : Aucun ensemble n'est en bijection avec l'ensemble de ses parties

Ind: (On suppose qu'il existe une surjection $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Trouver une contradiction grâce à l'ensemble $F = \{x \in E, x \notin \varphi(x)\}$

ETUDUP .com

Exercice 5: Soient E, F deux ensembles $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 6: Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto 2x$ $\quad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $y \longmapsto \begin{cases} y/2 & y \text{ pair} \\ \frac{y-1}{2} & y \text{ impair} \end{cases}$

1°/ Etudier l'injectivité, la surjectivité de f et g.

2°/ Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 7: (Facultatif) Soit E un ensemble. Etablir les formules suivantes pour toute famille de parties de E

a) $C_E^{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)} = \bigcap_{i\in I} C_E^{A_i}$ $\qquad C_E^{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} = \bigcup_{i\in I} C_E^{A_i}$

b) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

Exercice 8: Soient E, F deux ensembles $f : E \longrightarrow F$ une application

1°/ Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de F

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

2°/ Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de E

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

ETUDUP .com

ETUSUP.com
Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Mécanique
Droit
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
et encore plus..